Modèle d'Oppenheimer-Snyder

CHARFI Skander

Juillet 2018

Résumé

On s'intéressera dans ces quelques pages à la formation d'un trou noir à partir d'une étoile massive dans le cadre du modèle d'Oppenheimer-Snyder [Mis17][Haj08] qui consiste à recoller l'espace-temps de Friedmann qui correspond à l'intérieur de l'étoile sous forme de fluide parfait de pression nulle, avec l'espace-temps de Schwarzchild qui correspond à la solution aux équations d'Einstein modélisant l'effet d'un trou noir. On commencera dans ce mémoire par introduire les deux premières solution sans démontrer les résultats déjà présents dans le O'Neil [O'N83], mais la dernière partie porte sur le travail personnel que j'ai fourni afin d'étudier l'écrasement des étoiles sur elles-mêmes.

Table des matières

Pré-requis et Notations

Dans ce document, nous supposerons connues les bases de la géométrie semi-Riemannienne, c'est-dire, les trois premiers chapitres de [O'N83], ainsi que le début du chapitre 12 portant sur l'équation d'Einstein. Toutes les variétés seront aussi supposées C^∞ mis à part celle étudiée dans la section 3.

On notera :

— $\mathfrak{F}(M)$: ensemble des fonctions lisses d'une variété M à valeurs dans $\mathbb{R}$.

— $\mathfrak{X}(M)$: $\mathfrak{F}(M)$-module des champs de vecteurs sur M.

— g : tenseur métrique d'une variété différentielle. C'est un champ de tenseurs symétriques non dégénérés de signature constante sur M.

— g_{ij}, g^{ij} : : dans un système de coordonnées (x^i), $g_{i,j} = g(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})$. La non dégénérescence de g est équivalente au fait que les matrices (g_{ij}) sont inversibles en tout point. On note (g^{ij}) la matrice inverse.

— $D_X Y$: Connexion de Levi-Civita associée à un tenseur métrique g.

— $R_{XY}Z$: tenseur de courbure de Riemann : $R_{XY}Z = D_{[X,Y]}Z - D_X D_Y Z + D_Y D_X Z$.

— $M \times_f N$: produit déformé entre deux variétés semi-riemanniennes (M, g) et (N, h) selon une fonction scalaire qui ne s'annule pas f, qui est la variété produit munie de la métrique $g + f^2 h$.

On utilise aussi assez souvent la notation d'Einstein pour les contractions en émettant d'écrire la somme sur les indices non définis.

Toute autre notation sera définie dans la suite.

1 Espace-temps de Friedmann

1.1 Fluide parfait et espace-temps de Robertson-Walker

Définition 1.1.1 (Fluide parfait)**.** Un *fluide parfait* est un triplet (U, ρ, p) où :

— U est un tenseur vecteur unitaire de type temps appelé *quadrivitesse du fluide.*

— ρ et p sont des fonctions scalaires appelées respectivement *densité d'énergie* et *pression.*

Le *tenseur énergie-impulsion* est le tenseur donné par

$$T = (\rho + p)U^* \otimes U^* + pg \tag{1}$$

où U^* est le dual de U

Définition 1.1.2 (Espace-temps de Robertson-Walker)**.** Soit S une variété connexe de courbure constante $k \in \{-1, 0, 1\}$ et soit $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ strictement positive. Alors l'espace produit déformé $M(k, f) = I \times_f S$ est un *espace-temps de Robertson-Walker.*

Proposition 1.1.1. *Soit S une variété connexe de courbure constante $k \in \{-1, 0, 1\}$. Alors, en coordonnées sphériques,*

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)$$

.

Démonstration. Pour décrire la symétrie sphérique, on commence par se placer dans un système de coordonnées orthogonal (r, θ, ϕ) en imposant les paramètres de symétrie sur θ et ϕ. Et en choisissant toujours bien le sens du vecteur ∂_r, on affirme qu'il existe une fonction lisse l telle que

$$ds^2 = e^{l(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)$$

.

Par ailleurs, puisque la courbure de S est constante, son tenseur courbure de Riemann est donné par

$$R_{abcd} = k(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \tag{2}$$

En utilisant les notations d'Einstein, on obtient la courbure de Ricci

$$\begin{aligned} R_{ac} &= g^{bd}R_{abdc} = kg^{bd}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \\ &= k(g_{ac} - g_{ad}g^{bd}g_{bc}) = 2kg_{ac}. \end{aligned}$$

On applique à $(a, c) = (1, 1)$ pour obtenir l'équation suivante

$$\frac{l'(r)}{r} = 2ke^{l(r)}$$

On pose $p(r) = e^l(r)$, elle vérifie l'équation

$$\frac{p'(r)}{p^2(r)} = 2kr.$$

et si on impose que $l(0) = 0$, alors en résolvant l'équation, on trouve

$$p(r) = \frac{1}{1 - kr^2}.$$

□

Remarque. En utilisant la proposition 1.1.1 la métrique de l'espace-temps de Robertson-Walker devient en coordonnées sphériques (t, r, θ, ϕ) :

$$ds^2 = -dt^2 + f(t)^2\left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)\right) \tag{3}$$

En introduisant la distance comobile χ définie telle que $r = S_k(\chi)$ avec

$$S_k(\chi) = \begin{cases} sin(\chi) \text{ si } k = +1 \\ \chi \text{ si } k = 0 \\ sinh(\chi) \text{ si } k = -1 \end{cases} \tag{4}$$

Nous obtenons dans les coordonnées (t, χ, θ, ϕ) :

$$ds^2 = -dt^2 + f(t)^2(d\chi^2 + S_k^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)) \tag{5}$$

Théorème 1.1.1. *Soit U un champ de vecteurs unitaire de type temps dans $M(k, f)$. Le triplet (U, ρ, p) est un fluide parfait pour les deux fonctions scalaires ρ et p définies telles que :*

$$\frac{8\pi\rho}{3} = \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2} \tag{6}$$

$$-8\pi p = \frac{2f''}{f} + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2} \tag{7}$$

Proposition 1.1.2. *Pour triplet (U, ρ, p) défini comme précédemment, on a :*

$$\frac{3f''}{f} = -4\pi(\rho + 3p) \tag{8}$$

$$\rho' = -3(\rho + p)\frac{f'}{f} \tag{9}$$

Théorème 1.1.2 (Géodésiques radiales)**.** *Les géodésiques radiales dans l'espace-temps de Robertson-Walker sont les courbes données par*

$$t = \tau, \quad \chi = \chi_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \phi = \phi_0, \quad \forall\tau \in \mathbb{R}$$

.

1.2 Cosmologie de Robertson-Walker

Deux observations expérimentales ont été faites au 20ème siècle. La première, faite par Hubble en 1920, est la mesure du *temps de Hubble* $H_0^{-1} = \frac{f(t_0)}{f'(t_0)} = 18 \pm 2 \times 10^9$ années où t_0 est l'instant présent, ce qui assure que $f'(t_0) > 0$ et que l'univers $S(t)$ est actuellement en expansion. La deuxième est la mesure de la densité d'énergie et de la pression qui a donné $\rho_0 \gg p_0 > 0$. On peut raisonnablement se placer dans le cas $\rho + 3p > 0$.

Ces deux conditions permettent de conclure à des résultats très importants dans la cosmologie que nous allons présenter dans cette section.

Proposition 1.2.1. *Si $\exists t_0 \in I$ tel que $H_0 = H(t_0) > 0$ et si $\rho + 3p > 0$, alors I admet un bord initial en $t_* \in \mathbb{R}$ et on est dans l'un et un seul des deux cas suivants :*

— $f' > 0$

— *f admet un maximum après t_0 et $\exists t^* \in \mathbb{R}$ tel que $I =]t_*, t^*[$*

Définition 1.2.1. On dit que $M(k, f)$ admet une singularité physique en un instant t_* si $\lim\limits_{t \to t_*} \rho = \infty$.

Une singularité initiale t_* de $M(k, f)$ est un *big bang* si $\lim\limits_{t \to t_*} f = 0$ et $\lim\limits_{t \to t_*} f' = +\infty$.

Une singularité finale t^* de $M(k, f)$ est un *big crunch* si $\lim\limits_{t \to t^*} f = 0$ et $\lim\limits_{t \to t^*} f' = -\infty$.

Théorème 1.2.1. *On suppose que I est maximal pour $f > 0$. Si $\exists t_0 \in I$ tel que $H_0 = H(t_0) > 0$ et si $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que $-\frac{1}{3} < a \leq \frac{p}{\rho} \leq A$, alors :*

— *La singularité initiale est un big bang.*

— *Si $k \in \{-1, 0\}$, alors $I =]t_*, +\infty[$, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \rho = 0$.*

— *Si $k = +1$, alors f admet un maximum suivi d'un big crunch en t^* et $I =]t_*, t^*[$.*

Remarque. On remarque que dans le théorème, la condition sur ρ et p nous ramène à celle de la proposition, et qu'elle n'est pas déraisonnable appliquée à notre univers.

1.3 Espace-temps de Friedmann

Définition 1.3.1 (Espace-temps de Friedmann)**.** Un *espace-temps de Friedmann* est un espace temps de Robertson-Walker de pression nulle.

Dans ce cas, le fluide parfait est appelé *poussière.*

Proposition 1.3.1. *Soit $M(k, f)$ un espace-temps de Robertson-Walker. On suppose que f n'est pas constante. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$M(k, f)$ est un espace-temps de Friedmann.*

(ii) *Il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\rho f^3 = M \tag{10}$$

(iii) *Il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$(f')^2 + k = \frac{A}{f} \text{ avec } A = \frac{8\pi M}{3} \tag{11}$$

Cette équation porte le nom d'équation de Friedmann.

Cosmologie dans l'espace-temps de Friedmann On se place dans le cas $t_0 = 0$.

1. **Cas d'un espace plat** $k = 0$ **:** L'équation de Friedmann devient $f.(f')^2 = A$ de solution

$$f(t) = Ct^{\frac{2}{3}} \text{ avec } C = \left(\frac{9A}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{12}$$

   On retrouve que $\lim_{t\to+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} f' = 0$.

2. **Cas d'un espace à courbure négative** $k = -1$ **:** L'équation de Friedmann devient

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = 1 + \frac{A}{f}$$

   C'est l'analogue hyperbolique de l'équation du cycloïde dont la solution paramétrée s'écrit sous la forme suivante :

$$t(\eta) = \frac{1}{2}A(sinh(\eta) - \eta), \quad f(\eta) = \frac{1}{2}A(cosh(\eta) - 1) \quad \text{avec } \eta > 0 \tag{13}$$

   On retrouve que $\lim_{t\to+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} f' = 1$.

3. **Cas d'un espace à courbure positive** $k = +1$ **:** L'équation de Friedmann devient

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{A}{f}$$

   C'est l'équation du cycloïde dont la solution paramétrée s'écrit sous la forme suivante :

$$t(\eta) = \frac{\pi}{2}A + \frac{1}{2}A(\eta + sin(\eta)), \quad f(\eta) = \frac{1}{2}A(1 + cos(\eta)) \quad \text{avec } -\pi < \eta < \pi \tag{14}$$

   Le graphe de f est un cycloïde de $t_* = 0$ à $t^* = \pi A$ qui atteint son maximum en $t = \frac{\pi}{2}A$.

2 Géométrie de Schwarzchild

2.1 Métrique de Schwarzchild

L'espace temps de Schwarzchild est le modèle relativiste le plus simple modélisant un espace vide contenant une seule étoile à symétrie sphérique qui ne tourne pas sur elle même. Cette solution a été retrouvée par Schwarzschild à la fin de l'année 1915, quelques mois après la publication des équations d'Einstein. Et elle demeure une des solutions exactes à ces équations, ayant donné des résultats plus fins sur le système solaire que ceux prédits par la physique Newtonienne des corps célestes. Mais le plus important dans ce modèle est la singularité créée en joignant les deux espaces-temps extérieur et intérieur, afin de modéliser ce que l'on appelle un *trou noir*.

Définition 2.1.1 (Métrique de Schwarzschild)**.** Soit $M > 0$. La *fonction de Schwarzchild* est définie par

$$\hbar(r) = 1 - \frac{2M}{r} \tag{15}$$

Soient $P_I = \mathbb{R}^1 \times]2M, +\infty[$ et $P_{II} = \mathbb{R}^1 \times]0, 2M[$ munis de la métrique $-\hbar dt^2 + \hbar^{-1}dr^2$. On définit :

— L'*espace-temps extérieur de Schwarzchild* de masse M par le produit déformé $N = P_I \times_r S^2$.

— Le *Trou noir de Schwarzchild* de masse M par le produit déformé $B = P_{II} \times_r S^2$.

Ces deux variétés sont munies de la *métrique de Schwarzchild* donnée par :

$$ds^2 = -\hbar dt^2 + \hbar^{-1}dr^2 + r^2 d\sigma^2 \quad \text{avec } d\sigma^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2 \tag{16}$$

Les propriétés des connexions et des produits déformés donnent les différents résultats ci-dessous.

Proposition 2.1.1. *Dans $P_I \cup P_{II}$, on a les propriétés suivantes :*
1. $D_{\partial_t}\partial_t = \frac{M\hslash}{r^2}\partial_r, \quad D_{\partial_t}\partial_r = D_{\partial_r}\partial_t = \frac{M}{\hslash r^2}\partial_t, \quad D_{\partial_r}\partial_r = -\frac{M}{r^2\hslash}\partial_r$.
2. $\nabla t = -\frac{1}{\hslash}\partial_t, \quad \nabla r = \hslash\partial_r$.
3. $K = \frac{2M}{r^3}$.

2.2 Géodésiques de Schwarzchild

Les équations des géodésiques dans un système de coordonnées orthogonal sont données par

$$\frac{d}{ds}\left[g_{ii}\left(\frac{dx^i}{ds}\right)\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i}\left(\frac{dx^j}{ds}\right)^2, \quad \forall i \tag{17}$$

et appliquées aux coordonnées orthogonales (t, r, θ, ϕ), nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.2.1. *Si γ est une géodésique dans $N \cup B$, alors $\exists E, L \in \mathbb{R}$ tels que :*
1. $\hslash\frac{dt}{ds} = E$.
2. $r^2 sin^2(\theta)\frac{d\phi}{ds} = L$.
3. $\frac{d}{ds}\left(r^2\frac{d\theta}{ds}\right) = r^2 sin\theta cos\theta(\frac{d\phi}{ds})^2$.

Les constantes E et L sont respectivement appelées *énergie* et *moment cinétique*.

Définition 2.2.1. Une courbe *initialement équatoriale* relativement aux coordonnées sphériques dans $N \cup B$ est une courbe telle que $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{d\theta}{ds}(0) = 0$.

En appliquant la proposition précédente à une géodésique initialement équatoriale, on obtient la proposition suivante.

Proposition 2.2.1. *Si γ est une géodésique initialement équatoriale dans $N \cup B$, alors on a :*
1. $\hslash\frac{dt}{ds} = E$.
2. $r^2\frac{d\phi}{ds} = L$.
3. $\theta = \frac{\pi}{2}$.

*De plus, nous avons l'*équation d'énergie *donnée par :*

$$\begin{cases} E^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)\hslash(r) & \textit{si } \gamma \textit{ est de type temps : particule libre.} \\ E^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2}\hslash(r) & \textit{si } \gamma \textit{ est de type lumière : photon libre.} \end{cases} \tag{18}$$

Proposition 2.2.2. *Soit γ une particule libre initialement équatoriale et radiale c'est-à-dire telle que $L = 0$. Si $E < 1$ et $\frac{dr}{d\tau}(0) = 0$, alors on a une relation cycloïdale entre le rayon r et le temps propre τ donnée par :*

$$\tau(\eta) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2M}}(\eta + sin(\eta)), \quad r(\eta) = \frac{1}{2}R(1 + cos(\eta)) \quad \textit{avec } -\pi < \eta < \pi \textit{ et } R = r(0) \tag{19}$$

$$t = 2M.ln\left(\frac{\sqrt{\frac{R}{2M} - 1} + tan\frac{\eta}{2}}{\sqrt{\frac{R}{2M} - 1} - tan\frac{\eta}{2}}\right) + 2M\sqrt{\frac{R}{2M} - 1}\left(\eta + \frac{R}{4M}(\eta + sin(\eta))\right) \tag{20}$$

Démonstration. D'après l'équation d'énergie (18), on a

$$E^2 = E(0)^2 = 1 - \frac{2M}{R} \quad \text{et} \quad E^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \hbar(r) = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + 1 - \frac{2M}{r}$$

qui s'écrit

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 1 - E^2 - \frac{2M}{r} = \frac{2M}{R} - \frac{2M}{r}$$

donc, en posant $r' = \frac{r}{\sqrt{1-E^2}} = \sqrt{\frac{R}{2M}}r$, on obtient l'équation de cycloïde suivante

$$\left(\frac{dr'}{d\tau}\right)^2 = 1 - \frac{2M}{(1-E^2)^{\frac{3}{2}}r'} = 1 - \sqrt{\frac{R^3}{2M}}\frac{1}{r}$$

Ainsi, on obtient

$$\tau(\eta) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2M}}(\eta + sin(\eta)) \quad \text{et} \quad r'(\eta) = \sqrt{\frac{R}{2M}}r(\eta) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2M}}(1 + cos(\eta)) \quad \text{avec } -\pi < \eta < \pi$$

.

Pour avoir l'expression du temps t, on utilise la première équation de la proposition 2.2.1.

$$dt = \frac{E}{\hbar(r)}d\tau$$

, donc

$$\frac{dt}{d\eta} = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r(\eta)}}\frac{d\tau}{d\eta} = \frac{E}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2M}}\frac{1 - cos(\eta)}{1 - \frac{2M}{\frac{1}{2}R(1-cos(\eta))}} = \frac{E}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2M}}\frac{(1 - cos(\eta))^2}{1 - \frac{4M}{R} - cos(\eta)}$$

Il suffit maintenant d'intégrer en utilisant le changement de variable $x = tan\frac{\eta}{2}$ et de décomposer la fraction rationnelle obtenue en éléments simples et intégrer terme à terme. Mais il n'est pas intéressant de mettre tous les calculs sur ce documents. □

3 Modèle d'Oppenheimer-Snyder

3.1 Description du modèle

Le modèle d'Oppenheimer-Snyder décrit l'effondrement d'une boule de poussière sur elle-même afin d'arriver à la création d'un trou noir tout en étant une solution exacte aux équations d'Einstein pendant tout le long du processus.

Le processus de création du trou noir se fait en 3 phases :

1. **Phase stationnaire :** Au début, l'étoile est dans un état stationnaire dont l'intérieur est sous forme d'un fluide parfait. La présence d'une pression non nulle dans l'étoile compense l'attraction gravitationnelle et empêche l'effondrement.
2. **Phase intermédiaire :** La fusion nucléaire à l'intérieur de l'étoile induit à une pression nulle et le fluide parfait se transforme en poussière. La métrique intérieure à l'étoile est celle de Friedmann décrite dans la section 1.3. Étant donné que cet état est la limite d'un état stationnaire, il faut considérer un espace-temps dans un état initialement au repos sans expansion ni contraction de l'espace. On doit donc se placer dans le cas où la courbure est positive $k = 1$ avec un instant initial correspondant au maximum de la fonction f.
3. **Phase d'effondrement :** En absence de pression, l'attraction gravitationnelle devient prépondérante et l'étoile s'effondre sur elle même jusqu'à atteindre un rayon nul, formant ainsi un trou noir. La métrique doit converger vers celle de Schwarzchild décrite dans la section 2.1, ce qui nous mènera à considérer une telle métrique à l'extérieur de l'étoile.

La question qu'il faut se poser ici, et qui représente l'objet de ce mémoire, est la possibilité de coller les deux métriques selon la surface de l'étoile, et la régularité qu'il est possible d'atteindre.

3.2 Recollement des métriques

Le déplacement de la surface de l'étoile peut être décrit par les géodésiques radiales dont les points initiaux sont sur la taille initiale de l'étoile concernée. Il est donc nécessaire si l'on veut faire un recollement des deux métriques lors de l'écrasement, de trouver des propriétés similaires entre les géodésiques dans la métrique interne et dans la métrique externe.

En contemplant les résultats des sections 1 et 2, nous remarquons une relation cycloïdale entre le temps propre τ des géodésiques radiales et d'autres quantités. Ceci est l'idée clé pour le recollement continu des deux métriques selon la surface de l'étoile. Il est donc nécessaire de se placer sur un système de coordonnées orthogonal sur les deux métriques qui contient les 3 variables τ, θ et ϕ.

Théorème 3.2.1 (Critère de continuité)**.** *Soit une étoile initialement de rayon R dans la métrique de Schwarzchild et de rayon comobile χ_0 dans la métrique de Friedmann. Et soit n la coordonnée associée au vecteur ∂_n défini par :*

$$\partial_n = -\frac{dr}{d\tau}\partial_t + \frac{dt}{d\tau}\partial_r \tag{21}$$

Dans le système de coordonnées (τ, n, θ, ϕ), la métrique g est continue si et seulement si

$$R = Asin(\chi_0) \quad et \quad M = \frac{4}{3}\pi\rho(\tau)r(\tau)^3 \tag{22}$$

Démonstration. Dans le système de coordonnées (τ, n, θ, ϕ), l'élément de surface de la sphère est la surface caractérisé par $d\chi = 0$. En utilisant l'équation 5, cette surface a pour métrique

$$ds_-^2 = -d\tau^2 + f(\tau)^2 S_k(\chi_0)^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \tag{23}$$

Dans la métrique de Schwarzchild, la métrique de la surface est donnée par

$$\begin{aligned} ds_+^2 &= -\hbar \circ r(\tau)dt^2 + (\hbar \circ r(\tau))^{-1}dr^2 + r(\tau)^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \\ &= \left[-\hbar \circ r(\tau)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + (\hbar \circ r(\tau))^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2\right]d\tau^2 + r(\tau)^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \end{aligned} \tag{24}$$

Ainsi, g est continue ssi $ds_-^2 = ds_+^2$ ssi on peut identifier les termes :

- La première identification donne $-\hbar \circ r(\tau)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + (\hbar \circ r(\tau))^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = -1$ qui est vérifiée grâce à l'identité (20).
- La deuxième identification donne $r(\tau) = f(\tau)Sk(\chi_0) = f(\tau)sin(\chi_0)$.
  En utilisant les paramétrisations (14) et (19) de f, r et τ, on a

  $$\forall\eta \in]-\pi, \pi[, \quad \begin{cases} \frac{1}{2}R(1 + cos(\eta)) = \frac{1}{2}A(1 + cos(\eta))sin(\chi_0) \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2M}}(\eta + sin(\eta)) = \frac{1}{2}A(\eta + sin(\eta)) \end{cases}$$

  La première ligne donne le premier résultat $R = Asin(\chi_0)$.
  La deuxième ligne donne $M = \frac{R^3}{2A^2} = \frac{1}{2}Asin^3(\chi_0)$. En utilisant les résultat de la propriété 1.3.1, on a :

  $$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}Asin^3(\chi_0) = \frac{4}{3}\pi M sin^3(\chi_0) \\ &= \frac{4}{3}\pi\rho(\tau)f(\tau)^3 sin^3(\chi_0) = \frac{4}{3}\pi\rho(\tau)r(\tau)^3 \end{aligned}$$

□

Remarque. On remarque que :

— Les conditions de continuité de totale sur la surface de la sphère donne un résultat intuitif bien connu dans la physique : La masse de l'étoile est le produit de son volume par sa densité.

— Ce résultat a été fait lorsque $E < 0$ pour simplifier le travail, mais en toute généralité, en utilisant directement la fonction S_k, on aboutit au même résultat, bien que les autres cas ne soient pas "physiques".

Il est temps de se focaliser sur la question plus compliquée de la régularité du recollement, au moins radialement.

3.3 Critère de régularité

On se place dans cette section dans le cas où le recollement est continu.

La régularité radiale du recollement entre les métrique nécessite une connaissance de sa variation selon le vecteur normal n. On peut voir ceci grâce à l'identité suivante.

Proposition 3.3.1. *Pour toutes coordonnées α et β dans (τ, n, θ, ϕ), on a*

$$D_\alpha n_\beta = \frac{1}{2}\partial_n g_{\alpha\beta} \tag{25}$$

Démonstration. En utilisant les notations d'Einstein, on a

$$\begin{aligned}
D_\alpha n_\beta = n_{\alpha;\beta} &= \partial_\alpha n_\beta - n_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = -n_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2} n_\gamma g^{\gamma m}(\partial_\alpha g_{\beta m} + \partial_\beta g_{\alpha m} - \partial_m g_{\alpha\beta}) \\
&= -\frac{1}{2} n^m (\partial_\alpha g_{\beta m} + \partial_\beta g_{\alpha m}) + \frac{1}{2} n^m \partial_m g_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2}\partial_n g_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

□

Cette proposition montre la nécessité de passer par $D_\alpha n_\beta$, si l'on veut étudier la régularité C^1 du recollement. Mais on risque rapidement de tomber sur des difficultés car cette quantité dépend des coordonnées utilisées. C'est pourquoi il est nécessaire de trouver un invariant qui s'exprime facilement en fonction de $D_\alpha n_\beta$.

Remarque. Ce même problème peut être confronté lors de la mise en place du problème de Cauchy en relativité générale [HE73]. Ce dernier consiste à poser les bonnes données initiales et les bonnes conditions de jauge afin de pouvoir trouver une unique solution maximale aux équations d'Einstein vérifiant les conditions imposées. Et étant donné que les équations d'Einstein ne sont autres que des équations d'ondes non linéaires dans les coordonnées adéquates, la dérivée initiale de la métrique doit faire partie des données initiales et doit être bien modélisée dans ce problème. L'outil utilisé est la 2ème forme fondamentale K.

Afin de correspondre à notre problématique, on définit la 2ème forme fondamentale comme suit.

Définition 3.3.1 (2ème forme fondamentale)**.** La 2ème forme fondamentale de la surface de l'étoile est définie par

$$K_{ab} = D_\alpha n_\beta P^\alpha_a P^\beta_b \tag{26}$$

avec P le tenseur projection.

Proposition 3.3.2. *Soient $\zeta = (x^i)$ un système de coordonnées de l'espace-temps orthogonal à n et $\eta = (y^i)$ un système de coordonnées de la surface de l'étoile. Alors on a*

$$K_{ab} = -n_\gamma \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial y^a \partial y^b} - n_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} \tag{27}$$

Démonstration. En calculant directement, on a

$$K_{ab} = D_\alpha n_\beta P^\alpha_a P^\beta_b = (\partial_\alpha n_\beta - n_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b}.$$

Le second terme du développement donne déjà le terme présent dans le résultat. Il suffit donc de calculer le premier terme.

$$\partial_\alpha n_\beta \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} = \partial_a n_\gamma \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} = -n_\gamma \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial y^a \partial y^b}.$$

□

Théorème 3.3.1 (ADMIS : Condition de régularité de la métrique)**.** *: Si la 2ème forme fondamentale est continue sur la surface de l'étoile, alors la métrique est régulière.*

Remarque. Ceci est un théorème non trivial que j'ai trouvé après avoir eu l'idée de la 2ème forme fondamentale. Mais je n'ai pas pu le démontrer lors du stage.

Une démonstration peut être trouvée dans [Poi04].

Lemme 3.3.1. *Soient x une courbe et u sa quadrivitesse définie par*

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad \forall \alpha \tag{28}$$

alors : x suit une géodésique, si et seulement si, u vérifie l'équation

$$u^\alpha D_\alpha u^\beta = 0, \quad \forall \beta. \tag{29}$$

Démonstration. On a $\forall \beta$,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} &= \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \\
&= u^\alpha (\partial_\alpha u^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} u^\gamma) \\
&= u^\alpha D_\alpha u^\beta.
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.3.2 (Critère de régularité)**.** *Soit une étoile correspondant au modèle d'Oppenheimer-Snyder continu. Alors, le recollement des deux métriques est régulier.*

Démonstration. Pour assurer la continuité de la 2ème forme fondamentale, il suffit de vérifier celle de ses composantes K_{ab}. Procédons au cas par cas.

(i) Par orthogonalité de (τ, n, θ, ϕ), on a

$$\forall \alpha \neq \beta, \quad K_{\alpha\beta} = 0.$$

(ii) $K_{\tau\tau}$ **:** Par la définition de K, et en notant $u = \partial_\tau$, on a

$$K_{\tau\tau} = D_\alpha n_\beta u^\alpha u^\beta \tag{30}$$

donc

$$\begin{aligned}
K_{\tau\tau} &= D_\alpha n_\beta u^\alpha u^\beta = D_\alpha (n_\beta u^\beta) u^\alpha - n_\beta D_\alpha u^\beta u^\alpha \\
&= -n_\beta D_\alpha u^\beta u^\alpha
\end{aligned}$$

À l'intérieur de l'étoile, $u_- = \partial_\tau$ et est donc la quadrivitesse d'une géodésique radiale. Donc, d'après le lemme 3.3.1, $K^-_{\tau\tau} = 0$. Ainsi, $K_{\tau\tau}$ est continue sur la surface, si et seulement si, le vecteur u est la quadrivitesse d'une géodésique (radiale).

Puisqu'on supposé le recollement continu, cette condition est naturellement vérifiée.

(iii) $K_{\theta\theta}$ **:** Pour calculer ce terme, on utilise la formule donnée par l'équation 27.
En utilisant les résultats sur les métriques intérieures et extérieures, on a :

— $n_- = (0, \frac{f(t)}{\sqrt{1-kR^2}}, 0, 0)$, et par indépendance des coordonnées, le seul terme non nul est celui associé à $\Gamma^r_{\theta\theta} = -R(1-kR^2)$. Alors, on a

$$K^-_{\theta\theta} = -n^r_- \Gamma^r_{\theta\theta} = Rf(t)\sqrt{1-kR^2} = r\sqrt{1-kR^2}.$$

— $n_+ = (-\frac{dr}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau}, 0, 0)$ et puisque, par la proposition 2.1.1 $\Gamma^t_{\theta\theta} = 0$, le seul terme non nul est celui associé à $\Gamma^r_{\theta\theta} = -r\hbar$.
Ainsi, en utilisant l'équation (24), on obtient

$$K^+_{\theta\theta} = r\sqrt{\hbar + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}$$

.

L'égalité $K^-_{\theta\theta} = K^+_{\theta\theta}$ équivaut à

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + kR^2 = \frac{2M}{r}$$

et en supprimant le k grâce à l'équation de Friedmann (1.3) et en introduisant la densité ρ, on arrive finalement à l'identité

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho(\tau)r(\tau)^3.$$

(iv) $K_{\phi\phi}$ **:** se fait de façon similaire, et mène au même résultat.

□

Remarque. On remarque qu'on a démontré le résultat en toute généralité sur la courbure et l'énergie.

Conclusion

Le but initial de ce mémoire était d'étudier la régularité du recollement à tout ordre, et de déterminer si possible un ordre de différentiabilité maximal de la métrique. Ceci en procédant d'une manière générale et d'étudier directement les limites des dérivées de la métrique au voisinage de la surface.

Mais même au second ordre, je ne suis pas arrivé à trouver un invariant qui me puisse permettre de travailler des coordonnées. Et il m'est encore difficile de dire s'il existe une manière générale de procéder.

Il est aussi intéressant de noter la cohérence de la condition de régularité et de continuité, ce qui prouve la force du modèle d'Oppenheimer-Snyder, bien que celui-ci comporte des faiblesses comme par exemple la pression qui demeure nulle malgré le rayon de l'étoile qui converge vers le point.

Références

[Haj08] Petr Hajicek. An introduction to the relativistic theory of gravitation, 2008.

[HE73] S. W. Hawking and George F. Ellis. *The large scale structure of space-time [by] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis.* University Press Cambridge [Eng.], 1973.

[Mis17] author Misner, Charles W. *Gravitation.* 2017.

[O'N83] Barrett. O'Neill. *Semi-Riemannian geometry : with applications to relativity / Barrett O'Neill.* Academic Press New York, 1983.

[Poi04] Eric Poisson. A relativist's toolkit : The mathematics of black-hole mechanics, 2004.