FEUILLE D'EXERCICES 2 : LIMITES DE FONCTIONS

Par défaut, on considère que les fonctions ont pour ensemble de départ l'ensemble de définition de l'expression qui les définit.

Exercice 1. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 2$ et $g(x) = (x^2 + x - 2)\cos x$.

(1) Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |x^2 + x - 2| < \varepsilon.$$

(2) Montrer que $f(x)$ a une limite lorsque x tend vers 1 et la déterminer.

(3) Même question pour la fonction g.

Exercice 2. On considère la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+$. Montrer, en utilisant la définition de la limite, que $\sqrt{x}$ a une limite lorsque x tend vers 1.

Exercice 3. On rappelle que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$ (on peut se convaincre de cette affirmation par un raisonnement purement géométrique sur le cercle trigonométrique).

(1) Démontrer que $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$ et $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sin x$ a une limite lorsque x tend vers a et la déterminer.

(3) Calculer, si elle existe, la limite de la fonction suivante lorsque x tend vers π :
$$\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$$

(4) Calculer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers 0 :
$$\sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad ; \qquad \cos x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 4. Calculer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$:

(1) $\dfrac{x^2 - 2x}{x}$

(2) $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(3) $x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(4) $x - \lfloor x \rfloor$

(5) $\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$

(6) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

Exercice 5. Soient m, n des entiers strictement positifs. Discuter, selon les valeurs de m, n, l'existence et la valeur éventuelle de la limite en 0 de la fonction définie sur $]-1, 1[$ par
$$f_{m,n}(x) = \frac{\sqrt{1 + x^m} - \sqrt{1 - x^m}}{x^n}$$

Exercice 6. Soient a, b des réels strictement positifs. Montrer que :
$$\lim_{x \to 0; x > 0} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor = \frac{b}{a} \qquad ; \qquad \lim_{x \to 0; x > 0} \frac{b}{x} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = 0.$$

Exercice 7. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 8. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0.$$

(1) Montrer l'équivalence : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

(2) Montrer que si $L > 0$, on a l'équivalence : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Exercice 9. Soit f, g les applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(0) = 0\,,\; f(x) = x \left|\sin \frac{1}{x}\right| \quad (x > 0)\,; \quad g(0) = 0\,,\; g(x) = 1 \quad (x > 0).$$

(1) La fonctions f admet-elle une limite à droite en 0 ? une limite en 0 ?

(2) La fonction g admet-elle une limite à droite en 0 ? une limite en 0 ?

(3) Montrer que $g \circ f$ est une application bien définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans l'intervalle $]0,1]$ telles que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} (g \circ f)(u_n) \neq \lim_{n \to +\infty} (g \circ f)(v_n).$$

La fonction $g \circ f$ admet-elle une limite à droite en 0 ?

(4) Relire dans le cours le théorème sur les limites de fonctions composées. Quelle hypothèse de ce théorème est ici en défaut ?