FEUILLE D'EXERCICES 1 : TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}$

Exercice 1 - Voisinages
Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles des voisinages de 1?

$$A_1 = [-1,1], \quad A_2 =]-1,2], \quad A_3 =]-1,1[, \quad A_4 =]-1,2[\setminus\{1\}$$
$$A_5 =]-\infty,2], \quad A_6 =]-1,+\infty[, \quad A_7 =]-1,2]\setminus]\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}[.$$

Exercice 2 - Encore des voisinages
Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles des voisinages de 0?

$$A = [0,+\infty[, \quad B = [0,+\infty[\setminus\mathbb{N}, \quad C =]-10^{-2},10^{-3}[\cup]1000,+\infty[,$$
$$D = \{1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\ldots,\tfrac{1}{n},\ldots\}, \quad E = \{x\in\mathbb{R} \,|\, x^2-9<0\},$$
$$F = \{x\in\mathbb{R} \,|\, x^2-9>0\}, \quad G = \{x\in\mathbb{R} \,|\, x^4-5x^2+4>0\}.$$

Exercice 3 - Ouverts et fermés

(1) Déterminer si chacune des parties de l'exercice 1 est ou non un ouvert (respectivement un fermé) de $\mathbb{R}$.
(2) Même question pour les parties suivantes de $\mathbb{R}$: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $]0,1[\cup\{2\}$, $\{1/n, n\in\mathbb{N}^*\}$

Exercice 4 - Adhérence, intérieur, frontière
Pour chacune des parties de $\mathbb{R}$ de l'exercice 2, déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière.

Exercice 5 - Intersection dénombrable de parties de $\mathbb{R}$
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $A_n = \left[0,\frac{1}{n}\right[$.

(1) Les ensembles A_n sont-ils ouverts? fermés? voisinage de 0?
(2) Déterminer $A = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.
(3) L'ensemble A est-il ouvert? fermé? voisinage de 0?
(4) Mêmes questions pour $B_n = \left]0,\frac{1}{n}\right[$ et $C_n = \left]-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right[$.

Exercice 6 - Union dénombrable de parties de $\mathbb{R}$
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $A_n = \left[\frac{1}{n},\frac{n-1}{n}\right]$.

(1) Les ensembles A_n sont-ils ouverts? fermés? voisinage de 0?
(2) Déterminer $A = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.
(3) L'ensemble A est-il ouvert? fermé? voisinage de 0?

Exercice 7 - Borne supérieure et adhérence
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que $\sup A$ est un point adhérent à A.
(2) En déduire que si A est fermé, alors $\sup A\in A$.

Exercice 8 - Voisinages épointés
Les parties de $\mathbb{R}$ de l'exercice 1 sont-elles des voisinages épointés de 1?

Exercice 9 - Voisinages à l'infini
Les parties de $\mathbb{R}$ de l'exercice 2 sont-elles des voisinages de $+\infty$?

Exercice 10 - Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et soit $x \in \mathbb{R}$.
On rappelle que x est *valeur d'adhérence* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x.

(1) Montrer que x est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si pour tout voisinage V de x, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} |\ u_n \in V\}$ est infini.
(2) On pose $A = \{u_n |\ n \in \mathbb{N}\}$.
  (a) Montrer que si x est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $x \in \overline{A}$.
  (b) Montrer que si $x \in \overline{A} \setminus A$ alors x est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  (c) Donner un exemple de suite telle que $\overline{A} \setminus A = \emptyset$.
  (d) Donner un exemple de suite telle que $\overline{A} \setminus A = \{0\}$.
  (e) Donner un exemple de suite telle que $\overline{A} \setminus A = \{0, 1\}$.
  (f) Donner un exemple de suite telle que $\overline{A} \setminus A = \mathbb{N}$.

Compléments

Exercice 11 - Translations d'ouverts et de fermés
Pour toute partie A de $\mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, on note $A + b = \{a + b \,|\, a \in A\}$.
Pour toutes parties A et B de $\mathbb{R}$, on note $A + B = \{a + b \,|\, a \in A, b \in B\}$.

(1) Soit $b \in \mathbb{R}$. Montrer que si A est une partie ouverte de $\mathbb{R}$, alors $A + b$ est ouvert. Que peut-on dire si A est fermé ?
(2) Montrer que si A est une partie ouverte de $\mathbb{R}$ et B une partie de $\mathbb{R}$ (quelconque), alors $A + B$ est ouvert.
(3) On pose $A = \{-n \,|\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ et $B = \{n + \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$
  (a) Montrer que A et B sont fermés.
  (b) Montrer que $A + B$ n'est pas fermé.

Exercice 12 - Passage au complémentaire de l'adhérence et de l'intérieur
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

(1) Pour un réel x, exprimer avec des quantificateurs que x est un point adhérent à A (c'est-à-dire $x \in \overline{A}$).
(2) Pour un réel x, exprimer avec des quantificateurs que x est un point intérieur à A (c'est-à-dire $x \in \mathring{A}$).
(3) Montrer que $\overline{\mathbb{R} \setminus A} = \mathbb{R} \setminus \mathring{A}$.
(4) Montrer que $\overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus A}} = \mathbb{R} \setminus \overline{A}$.

Exercice 13 - Connexité de $\mathbb{R}$
On veut montrer par l'absurde que les seules parties à la fois ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$ et $\emptyset$.
On suppose qu'il existe une partie ouverte et fermée A de $\mathbb{R}$ non vide et distincte de $\mathbb{R}$. Soit B son complémentaire dans $\mathbb{R}$ et soit alors $a \in A$ et $b \in B$.

(1) On se place d'abord dans le cas où $a < b$ et on pose alors $C = [a, b] \cap A$.
  (a) Montrer que C admet une borne supérieure, que l'on notera c.
  (b) En utilisant que A est fermé, montrer que $c \in A$.
  (c) En utilisant que A est ouvert, trouver une contradiction.
(2) On se place dans le cas où $b < a$. Trouver une contradiction
(3) Conclure.