MMAN2 - Licence MIASHS - Feuille d'Exercice 5

Exercice 1

Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $\cos x \cdot \exp x$ à l'ordre 3
2. $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4
3. $\dfrac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$ à l'ordre 6
4. $\exp\big(\sin(x)\big)$ à l'ordre 4
5. $\sin^6(x)$ à l'ordre 9
6. $\ln\big(\cos(x)\big)$ à l'ordre 6
7. $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4 (délicat)
8. $\tan x$ à l'ordre 5 (ou 7 pour les plus courageux)

Exercice 2

1. Développement limité en 1 à l'ordre 3 de $f(x) = \sqrt{x}$.
2. Développement limité en 1 à l'ordre 3 de $g(x) = e^{\sqrt{x}}$.
3. Développement limité à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $h(x) = \ln(\sin x)$.

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on a
$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$
2. En utilisant le développement de Taylor de $\exp(x)$, montrer que
$$\left| \mathrm{e} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{n!} \right| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}.$$
En déduire la limite de la suite $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 4

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Exercice 5

Étudier la position du graphe de l'application $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

Exercice 6

Déterminer :

1. (a) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x$

   (b) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x$

2. $\lim_{x\to 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{x^2}}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin x}{1-\cos x}$

Exercice 7 Recherche d'équivalents

Donner des équivalents simples pour les fonctions suivantes :

1. $2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$, en 0
2. $\arctan x + \arctan \frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3}$, en $\sqrt{3}$
3. $\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$, en $+\infty$

Exercice 8 Approximation de cos

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

soit un $o(x^n)$ en 0 avec n maximal.

Exercice 9

Calculer

$$\ell = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x.$$

Donner un équivalent de

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - \ell$$

lorsque $x \to +\infty$.