MMAN2 - Licence MIASHS - Feuille d'Exercice 4

1 Utilisation de la définition

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

1. Calculer $\int_0^4 f(t)\,dt$.
2. Soit $x \in [0,4]$, calculer $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0,4]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0,4]$?

Exercice 2

Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = x\ ,\ g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = e^x,$$

Justifier qu'elles sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales $\int_0^1 f(x)dx$, $\int_1^2 g(x)dx$ et $\int_0^x h(t)dt$.

Exercice 3

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ $(a < b)$.

1. On suppose que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a,b]$, et que $f(x_0) > 0$ en un point $x_0 \in [a,b]$. Montrer que $\int_a^b f(x)dx > 0$. En déduire que : «si f est une fonction continue positive sur $[a,b]$ telle que $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors f est identiquement nulle».
2. On suppose que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.
3. Application : on suppose que f est une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $d \in [0,1]$ tel que $f(d) = d$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
7. Si f est paire alors F est impaire.

Exercice 5

Soit f une fonction continue strictement croissante sur l'intervalle $[0,a]$. telle que $f(0) = 0$.

1. En choisissant soigneusement des sommes de Riemann, ou par une autre méthode, calculer

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(x)dx$$

Il est vrai que f^{-1} est aussi une fonction continue sur $[0, f(a)]$, et qu'elle est donc intégrable, vous n'avez pas besoin de le prouver.

2. *(Facultatif)* En déduire que pour tout $\alpha \in [0,a]$ et $\beta \in [0, f(a)]$,

$$\alpha\beta \leqslant \int_0^\alpha f(x)dx + \int_0^\beta f^{-1}(x)dx.$$

2 Calculs de primitives

Exercice 6

Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.

1. $\int x^2 \ln x\, dx$
2. $\int x \arctan x\, dx$
3. $\int \ln x\, dx$ puis $\int (\ln x)^2\, dx$
4. $\int \cos x \exp x\, dx$

Exercice 7

Calculer les primitives suivantes par changement de variable.

1. $\int (\cos x)^{1234} \sin x\, dx$
2. $\int \frac{1}{x \ln x}\, dx$
3. $\int \frac{1}{3+\exp(-x)} dx$

Exercice 8

Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

1. $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\, dx$
2. $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\, dx$
3. $\int \sin^8 x \cos^3 x\, dx$
4. $\int \frac{1}{\sin x}\, dx$
5. $\int \frac{3-\sin x}{2\cos x + 3\tan x}\, dx$

3 Calculs d'intégrales

Exercice 9

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx$ (intégration par parties)
2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\, dx$ (à l'aide d'un changement de variable simple)
3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$ (changement de variable $x = \tan t$)
4. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\, dx$ (décomposition en éléments simples)
5. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x\, dx$ (changement de variable $u = \frac{1}{x}$)

Exercice 10

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx.$$

Exercice 11 Formule de Wallis

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ pour $n = 0, 1, 2, \cdots$

1. Montrer que $I_n \leqslant I_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$, et que $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$. Montrer alors que $\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1$ pour $n = 1, 2, \cdots$.
2. En déduire que

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

et démontrer la formule de Wallis qui est

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{2^{4n+1}(n!)^4}{(2n)!^2}.$$