



## Compléments sur la croissance comparée

On rappelle trois résultats du cours :

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty,$$

3. Pour tout  $x > 0$ , et pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$x^a = \exp(a \ln x).$$

### Exercice 1

Soient  $a, b$  et  $x$  trois nombres réels non nuls. Montrer que

$$\frac{(|\ln x|)^b}{|x|^a} = \left| \frac{b}{a} \right| \left| \frac{\ln |x|^{\frac{a}{b}}}{|x|^{\frac{a}{b}}} \right|^b$$

En déduire que pour tout  $a > 0$  et  $b > 0$ ,

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0,$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} |\ln x|^b x^a = 0,$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(ax)}{x^b} = +\infty,$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b \exp(ax) = 0.$

### Exercice 2

Soient  $a, b, c$  et  $d$  quatre nombres. Calculer les valeurs possibles de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a + (\ln x)^b}{x^c + (\ln x)^d}$$

### Exercice 3

1. Trouver deux nombres  $a$  et  $b$  tels que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\ln x + 9(\ln x)^2} - a \ln x - b = 0$$

2. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{18} + (\ln x)^7 + (\sin x)^2}{\exp \left( \left( \frac{(1+5 \cosh(\frac{1}{x}))x^2 + x + 2}{(1+5 \sin(\frac{1}{x}))x^2 + x + 2} \right) \sqrt{\ln x + 9(\ln x)^2} \right)}$$