MMAN2 - Licence MIASHS - Feuille d'Exercice 2

Exercice 1

Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$, (a et b réels) admet au plus trois racines réelles.
Indication :On pourra utiliser le théorème de Rolle.

Exercice 2

Soit I un intervalle, $a \in I$, et $f \in C(I)$ une fonction dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Montrer que si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \to \ell} f'(x) = \ell$$

alors f est dérivable sur I et $f'(a) = \ell$.

Exercice 3

Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que
$$x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y.$$
2. On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par
$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1-\alpha)y) - \alpha \ln x - (1-\alpha) \ln y.$$
De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0,1[$
$$\alpha \ln x + (1-\alpha) \ln y < \ln(\alpha x + (1-\alpha)y).$$
Interprétation géométrique ?

Exercice 4

Soient $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ ($a < b$) et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a,b]$.
2. Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a,b]$. Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
3. On suppose que $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que
$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$$
4. *Application.* Calculer la limite suivante :
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 5

En utilisant la règle de l'Hospital, calculez les limites suivantes :

1. Pour $n > 1$,
$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{(1+x)^n - 1}.$$
2. Pour $a > 0$,
$$\lim_{x \to 0} \frac{ax - \sin x}{x^3}$$
(on discutera en fonction de la valeur de a).

Exercice 6

Vérifier
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 7

Écrire sous forme d'expression algébrique

1. $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arcsin x)$, $\cos(2 \arcsin x)$.
2. $\sin(\arctan x)$, $\cos(\arctan x)$, $\sin(3 \arctan x)$.

Exercice 8

1. Résoudre l'équation suivante : $\arccos x = 2 \arccos \frac{3}{4}$.
2. Calculer $\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$, $\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$ et $\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$.

Exercice 9

Montrer que pour tout $x > 0$, on a
$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

En déduire une expression de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$ et calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 10

Simplifier l'expression
$$\frac{2\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}(2x)}{x - \ln(\operatorname{ch} x) - \ln 2}$$
et donner ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.