MMAN2 - Licence MIASHS - Feuille d'Exercice 1

Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, étudier la dérivabilité et calculer la dérivée lorsqu'elle existe.

— $f : x \to \ln(\ln(x))$, $x > 1$.

— $g : x \to \ln\left(e^{x^2} + 1\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Calculez la dérivée de f, et donnez l'équation de la tangente au graphe de f en $x = 0$ pour la fonction

$$x \to \frac{1}{1+\exp(-x)}, \text{ si } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

Etudiez la continuité et la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$x \to \begin{cases} x^x, \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4

Étudier si les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sin\frac{1}{x}, \text{ si } x \neq 0 \quad ; \quad f_0(0) = 0; \\ f_1(x) &= \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}, \text{ si } x \neq 0 \quad ; \quad f_2(0) = 0; \\ f_2(x) &= x^2 \ln\left(x^2\right), \text{ si } x \neq 0 \quad ; \quad f_3(0) = 0. \end{aligned}$$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 6

Déterminer les extremums de $f : x \to x^4 - x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad \text{si } x > 1$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \to \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ 1 + \frac{1}{2}x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

— Déterminer l'ensemble des points où f est continue.
— Déterminer l'ensemble des points où f est dérivable.

Exercice 9

Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

sur l'intervalle $[a, b]$ préciser le nombre "c" de $]a, b[$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 10

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1 + x)^n}, \quad x \geqslant 0.$$

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geqslant 0$.
   (b) En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.
2. (a) En déduire l'inégalité suivante :

$$(1 + x)^n \leqslant 2^{n-1}(1 + x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

   (b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a

$$(x + y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

Exercice 11

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$

   où P_n est un polynôme.
   (a) Trouver P_1 et P_2.
   (b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P'_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que f est de classe C^∞.